

Prof. Tomasz Rychlik
Instytut Matematyczny PAN
Śniadeckich 8
00 656 Warszawa

Bydgoszcz, 26.11.2020 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Anety Augustynowicz
pt. *Prawie pewne własności asymptotyczne statystyk porządkowych*

Praca doktorska pani Anety Augustynowicz dotyczy asymptotycznego zachowania statystyk pozycyjnych $X_{k_n:n}$ przy $n \rightarrow \infty$ pochodzących z ciągów zmiennych losowych o rozkładzie ściśle stacjonarnym. Rozważane są przypadki centralnych i skrajnych statystyk pozycyjnych, tj. takich, że ilorazy $X_{k_n:n}/k_n$ zbiegają do stałej λ z przedziału otwartego $(0, 1)$ lub odpowiednio należącej do któregoś z jego końców. W szczególności rozważany jest problem asymptotycznej zbieżności frakcji $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_A(X_{k_n:n} - X_i)$ tych obserwacji spośród X_1, \dots, X_n , które wpadają do otoczenia A losowej wartości $X_{k_n:n}$. Problemy tego typu, zapoczątkowane pracą Pakesa i Steutela (1997), były rozważane przez wielu autorów przy szczególnych założeniach, że elementy obserwacji były niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, a zbiór A przedziałem zawierającym zero. Zastąpienie przedziału dowolnym zbiorem borelowskim oraz ciągów niezależnych o jednakowym rozkładzie ciągami stacjonarnymi było zasługą promotorki rozprawy, a oceniana rozprawa stanowi kontynuację i rozszerzenie wyników profesor Dembińskiej.

Praca doktorska oparta jest na 4 artykułach naukowych. Dwa z nich, napisane wspólnie z promotorką, zostały opublikowane w bardzo dobrych czasopismach naukowych *Journal of Mathematical Analysis and Applications* oraz *Insurance: Mathematics and Economics*. Pozostałe dwa są indywidualnymi osiągnięciami Kandydatki i oczekują publikacji w *Communications in Statistics* i *Statistics and Probability Letters*.

Istotną część rozprawy stanowią wyniki z podstaw teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych. W szczególności są to definicje (z uzasadnieniem ich poprawności) warunkowych kwantyli i końców nośnika zmiennej losowej względem wybranego σ -ciała oraz opis ich własności, podane w rozdziale 3. Pojęcie warunkowej mediany było znane już od lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, ale jego rozszerzenia na kwantyle dowolnego rzędu było dziełem promotorki rozprawy. Pojęcie warunkowych końców nośnika jest autonomicznym elementem rozprawy. Szczególnie trudnym zadaniem było pokazanie kluczowego wyniku pracy, że ciąg skrajnych górnych (dolnych) statystyk pozycyjnych skonstruowanych na bazie ściśle stacjonarnego

ciągu zmiennych losowych jest zbieżny prawie na pewno do górnego (odpowiednio dolnego) warunkowego kwantyla końca nośnika pojedynczej obserwacji względem σ -ciała zbiorów niezmienniczych względem ciągu stacjonarnego. Uzyskanie tego wyniku wymagało subtelnych dodatkowych konstrukcji i rozumowań: pierwotnie dowodzone twierdzenia dla specjalnie skonstruowanego ciągu zmiennych losowych na przestrzeni nieskończone wymiarowych wektorów rzeczywistych z miarą stacjonarną i σ -ciała zbiorów prawie niezmienniczych względem tej miary. Dla każdego ciągu ściśle stacjonarnego na dowolnej przestrzeni probabilistycznej konstruowano przestrzenie ciągów rzeczywistych z odpowiednią miarą stacjonarną i zmienne losowe o rozkładzie z pierwotnego ciągu. Ponieważ skrajne statystyki pozycyjne powstałe z tej konstrukcji dążyły do warunkowego końca nośnika, to również statystyki pozycyjne z pierwotnego ciągu miały losową granicę mierzalną względem niezmienniczego ciągu. Ostatnim krokiem było pokazanie, że ta granica jest równa warunkowemu końcowi nośnika prawie na pewno. Pośrednim wskaźnikiem trudności tego rozumowania jest fakt, że w przypadku centralnym twierdzenie o zbieżności statystyk pozycyjnych do warunkowego kwantyla w przestrzeni szczególnej postaci pojawiło się w pracy Dembińskiej z 2014 roku (p. poz. [16] bibliografii), a zmienna losowa o rozkładzie prawie identycznym z warunkowym kwantylem w pracy tej samej autorki w 2017 roku (p. *Metrika* 80, 319–332).

Praca doktorska zawiera pełne dowody zbieżności centralnych i skrajnych statystyk pozycyjnych odpowiednio do warunkowego kwantyla i warunkowego końca nośnika dla dowolnych ciągów ściśle stacjonarnych. Analogiczne konstrukcje i rozumowania zostały przeprowadzone w przypadku wyznaczania asymptotycznego rozkładu frakcji obserwacji wpadających do otoczeń statystyk pozycyjnych. Godny odnotowania jest fakt udowodniony w rozprawie, że w przypadku otoczeń skrajnych statystyk pozycyjnych wyniki istotnie zależą od wartości warunkowego końca nośnika. Być może ktoś kiedyś znajdzie drogę na skróty do tych wyników, ale na razie należy docenić osiągnięcia pani Augustynowicz i jej promotorki.

Kolejnym istotnym wynikiem rozprawy było zastąpienie klasycznego stacjonarnego ciągu zmiennych losowych w problemie szacowania liczby obserwacji wpadających w otoczenia skrajnych statystyk pozycyjnych przez ciągi obserwowane w momentach losowych generowanych przez proces liczący zbiegający do nieskończoności. Zadanie to było motywowane praktycznym problemem statystyki ubezpieczeniowej (podobnie jak i klasyczne, tylko jeszcze bardziej) polegającym na zliczaniu szkód bliskich ekstremalnemu. Przy różnych założeniach na temat asymptotycznego zachowania procesu liczącego wyznaczono asymptotyczne wartości liczby obserwacji wpadających w otoczenia skrajnych statystyk pozycyjnych. Warte zauważenia są też twierdzenia szacujące sumaryczną wartość zmiennych losowych (szkód) z oto-

czeń ciągów skrajnych statystyk pozycyjnych obserwowanych w losowych momentach czasowych.

Godne pochwały jest pionierskie podejście do asymptotycznej teorii statystyk pozycyjnych zaprezentowane w pracy. Problemy te zostały gruntownie przebadane w klasycznym przypadku ciągów zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie. Centralne statystyki pozycyjne zbiegają wówczas prawie na pewno do kwantyli odpowiednich rozkładów (są subtelne modyfikacje w przypadku niejednoznaczności kwantyli), a skrajne do końców nośnika. Powszechnie znane są też klasy asymptotycznych rozkładów odpowiednio unormowanych statystyk pozycyjnych oraz obszary ich przyciągania. Wiele prac z teorii wartości ekstremalnych poświęcono odstępstwom od klasycznego modelu. Odstępstwa te nie prowadziły jednak do zmiany asymptotycznych wyników, a co najwyżej do ich nieznacznych modyfikacji. Ograniczenie do założenia jedynie ścisłej stacjonarności doprowadziło do radykalnie innych konkluzji. Okazuje się, że w tej sytuacji również niezmodyfikowane przez procedury normalizacji statystyki pozycyjne mogą zbiegać prawie na pewno do niezdegenerowanych zmiennych losowych.

Słabszą stroną teorii statystyk pozycyjnych opartych na ciągach stacjonarnych stanowi brak nietrywialnych przykładów. Założenie ergodyczności dopuszcza wiele znanych i użytecznych modeli stochastycznych, ale prowadzi do klasycznych rezultatów. Poza tym Autorka podała jedynie trzy przykłady pozwalające otrzymać losowe granice: ciąg identycznych zmiennych losowych, oraz ciągi stacjonarne ergodyczne zmodyfikowane przez dodanie zmiennej losowej lub pomnożenie przez dodatnią zmienną losową. Jedynie ostatni przypadek prowadzi do nietrywialnie zmodyfikowanego asymptotycznego rozkładu frakcji obserwacji w wybranym sąsiedztwie skrajnych statystyk pozycyjnych. Przykład ten został wykorzystany w rozprawie do modelowania wielorakich szkód spowodowanych przez wspólną przyczynę. Mimo wszystko, wydaje mi się on zbyt akademicki. Za bliższe praktyki uznałbym następujące po nim rozważania, które na podstawie analizy danych rzeczywistych sugerują dobór modelu matematycznego.

Praca doktorska pani mgr Anety Augustynowicz została dobrze zredagowana i zawiera wartościowe wyniki. Warto podkreślić jest nowatorskie podejście do tematyki uprawianej przez wielu matematyków (p. np., wstęp do rozprawy i spis literatury). Moje opisane powyżej uwagi krytyczne wskazują, że prace w tej dziedzinie są jeszcze na początkowym etapie i wiele jeszcze zostało do zrobienia. W moim przekonaniu, zostały spełnione wszystkie formalne i zwyczajowe wymagania dotyczące prac doktorskich z matematyki. Wniosuję o dopuszczenie mgr Anety Augustynowicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.